



Tema V

Momento lineal y colisiones.

Conservación del momento lineal.

Impulso de una fuerza.

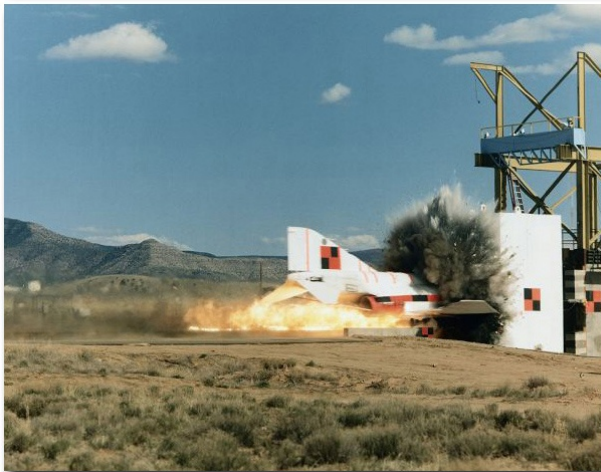
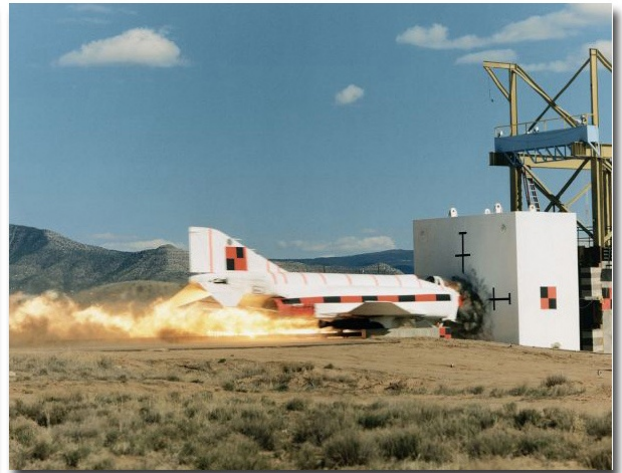
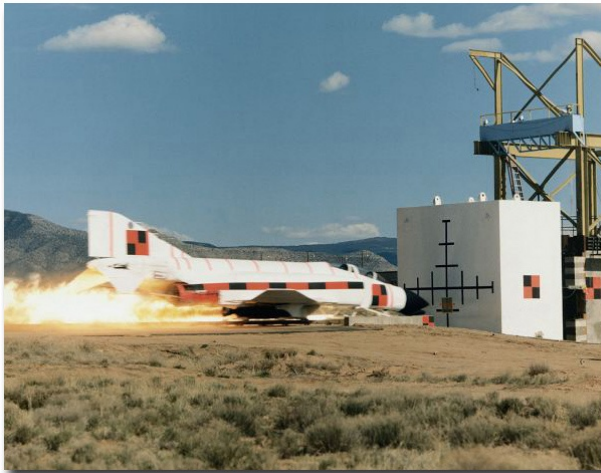
Colisiones elásticas e inelásticas.

Movimiento del CM.

Sistema CM



Tema V (Capítulos: **8 de Física**, P. A Tipler-Mosca, 6ª ed. ; **7, 8 de Física**, Bauer /Westfall;)
¡Resuelve los ejemplos de la lección!



👉 La descripción de colisiones en sistemas dinámicos se hace en términos del **momento lineal** y del **impulso de una fuerza** (son cantidades vectoriales).

El momento lineal **p** de una partícula en un marco de referencia dado es

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

👉 **Unidad de momento lineal:** $1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$

Ecuación de dimensiones: $[\mathbf{p}] = [\mathbf{m}][\mathbf{v}] = \text{MLT}^{-1}$

👉 **Newton enunció sus leyes en términos del momento lineal:**

La 1ª ley de Newton establece que el **p** de una partícula permanece constante a menos que una fuerza externa actúe sobre ella.

P no cambia para una partícula aislada (**P=cte**)

La 2ª ley describe cómo cambia **p** en presencia de fuerzas.

$$d\mathbf{p}/dt = d(m\mathbf{v})/dt = m d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dm/dt$$

$$d\mathbf{p}/dt = m d\mathbf{v}/dt = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$$

(si la masa del objeto no cambia durante el movimiento).

enunciado más general de la 2ª ley de Newton

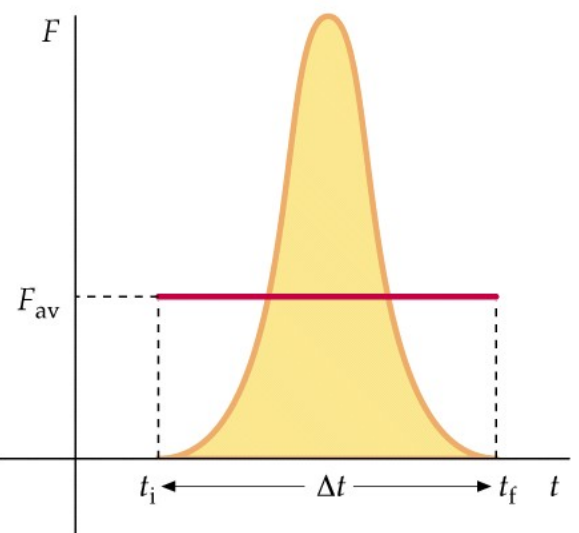
👉 **Momento lineal y energía cinética**

$$E_c = m\mathbf{v}^2/2 = \mathbf{p}^2/2m$$

Momento lineal transferido o Impulso de una fuerza **I** es:

$$\mathbf{I} = \int_{(\Delta t)} \mathbf{F} dt = \int_{(\Delta t)} (d\mathbf{p}/dt) dt = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}$$

Si **F** es constante, **I = FΔt = Δp**



$$\mathbf{F}_{media} \Delta t \equiv \int_{\Delta t} \mathbf{F} dt$$

Sistemas de partículas:



El momento lineal de un sistema de varias partículas es la suma (vectorial) de los momentos lineales de las partículas individuales $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$.

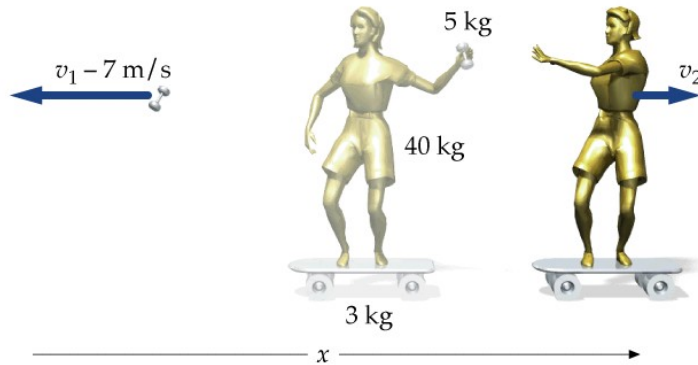


El momento lineal total de un sistema aislado de partículas se conserva.

$$\text{Si } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow d\mathbf{p}/dt = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{constante}$$

EJEMPLO 1 ¿Con qué velocidad $\mathbf{v}_2$ es impulsada la patinadora hacia atrás después de lanzar horizontalmente el segundo peso?

el sistema (= patinadora + tabla + dos pesas) está aislado ($\mathbf{F}_{\text{neto}}=0$)

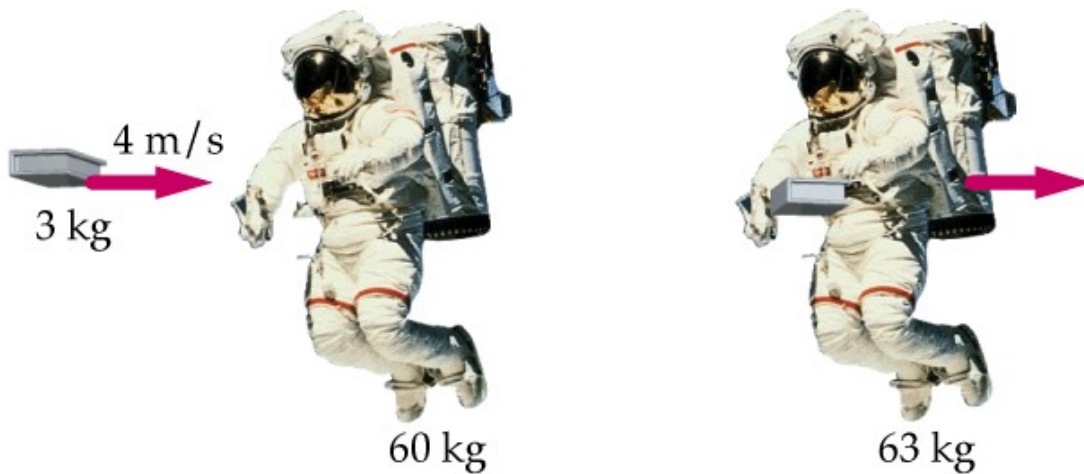


$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad ; \quad \mathbf{P}_i = 0$$

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{p}(\text{pesas}) + \mathbf{p}(\text{patinadora} + \text{patín})$$

$$0 = (-7 \mathbf{i}) \times 5 \times 2 + \mathbf{v}_2 \times (40 + 3)$$

EJEMPLO 2 ¿Con qué velocidad $\mathbf{v}$ se mueve el astronauta (fuera del campo gravitatorio) cuando ha cogido el libro? ¿Variación de energía cinética del sistema? ¿Impulso sobre el astronauta?



Sistema = astronauta + libro (**no hay fuerza externa**)

$$\mathbf{p}_{\text{inicial}} = \mathbf{p}_{\text{final}} \text{ (sistema)} \Rightarrow 4.0 \mathbf{i} \times 3.0 + 0 = \mathbf{v} \times (60 + 3) \Rightarrow \mathbf{v} = 0.19 \text{ m/s } \mathbf{i}$$

$$E_{c \text{ final}} - E_{c \text{ inicial}} = 63 \times 0.19^2 / 2 - 3 \times 4^2 / 2 = -22.86 \text{ J} \cong -23 \text{ J}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_{\text{final}} - \mathbf{p}_{\text{inicial}} \text{ (astronauta)} = 63 (0.19 \text{ m/s } \mathbf{i} - 0) = 11.97 \mathbf{i} \cong 12 \mathbf{i} \text{ kg m/s}$$

Momentum Conservation in Collisions (1)

- During the collision object 1 exerts a force $\vec{F}_{12}$ on object 2.
- Use relationship between force and momentum change

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12} dt = \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{f,2} - \vec{p}_{i,2}$$

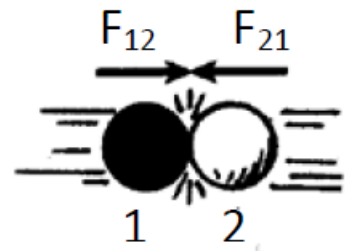
[i = initial (before collision), f = final (after collision)]

- Object 2 exerts a force $\vec{F}_{21}$ on object 1. Thus:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21} dt = \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{f,1} - \vec{p}_{i,1}$$

- According to Newton's Third Law:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Leftrightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$



- Integrate the result from Newton's Third Law:

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}) dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21} dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12} dt = \underbrace{\vec{p}_{f,1} - \vec{p}_{i,1}}_{\Delta \vec{p}_1} + \underbrace{\vec{p}_{f,2} - \vec{p}_{i,2}}_{\Delta \vec{p}_2}$$

- Thus: $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$ (valid for every two-body collision!)
- Rearrange this equation:

$$\vec{p}_{f,1} + \vec{p}_{f,2} = \vec{p}_{i,1} + \vec{p}_{i,2}$$

- This is the Law of Momentum Conservation!
 - Holds for all two-body collisions
 - Fundamental conservation law, just like energy conservation

En el sistema formado por el objeto 1 + el objeto 2, las fuerzas (de gran magnitud) F_{12} y F_{21} son fuerzas interiores. En las colisiones, generalmente, las fuerzas exteriores son bastante más débiles y, dado el pequeño intervalo de tiempo que actúan, sus respectivos impulsos pueden despreciarse.

Por tanto, en una colisión, durante la cual prácticamente el sistema de las dos partículas se puede considerar aislado, el momento lineal se conserva.

Totally Elastic Collisions in 1d (2)

- Totally elastic collision is an ideal case in which two conditions are fulfilled:
 - Total momentum is conserved (valid for all collisions)

$$p_{f,1} + p_{f,2} = p_{i,1} + p_{i,2}$$

- Total kinetic energy is conserved

$$\frac{p_{f,1}^2}{2m_1} + \frac{p_{f,2}^2}{2m_2} = \frac{p_{i,1}^2}{2m_1} + \frac{p_{i,2}^2}{2m_2}$$

- Result: can calculate momenta after collision

$$p_{f,1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_{i,1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_{i,2}$$

$$p_{f,2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_{i,1} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_{i,2}$$

Totally Inelastic Collisions

- A totally inelastic collision is defined as one in which the two collision partners stick together after the collision
 - Example: mosquito en el parabrisas del coche
- If both partners stick together, their final velocities after the collision must be identical

$$\vec{v}_{f,1} = \vec{v}_{f,2} \equiv \vec{v}_f$$

- Please note: in this case, the final relative velocity is zero
- Momentum conservation results in

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{i,1} + m_2 \vec{v}_{i,2}}{m_1 + m_2}$$

Energía cinética perdida

- Total initial kinetic energy

$$K_i = \frac{p_{i,1}^2}{2m_1} + \frac{p_{i,2}^2}{2m_2}$$

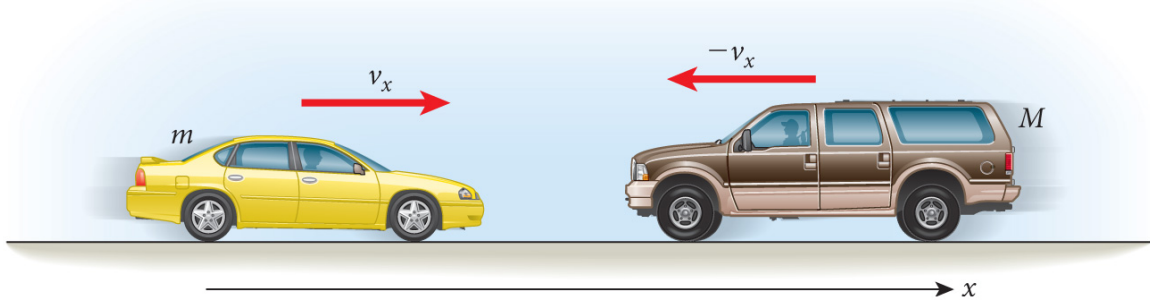
- Total final kinetic energy

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \vec{v}_{i,1} + m_2 \vec{v}_{i,2}}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ &= \frac{(m_1 \vec{v}_{i,1} + m_2 \vec{v}_{i,2})^2}{2(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

- Take the difference of these two and find the kinetic energy loss

$$\Delta K = K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{i,1} - \vec{v}_{i,2})^2$$

- la pérdida de energía cinética es generalmente menor que la energía cinética inicial => el sistema No siempre puede deshacerse de toda la energía cinética, incluso en colisiones completamente inelásticas .
Hay un caso en el que se elimina toda la energía cinética en un choque totalmente inelástico: cuando los momentos iniciales son iguales en magnitud y opuestos en dirección.
- la pérdida de energía cinética es proporcional al cuadrado de la velocidad relativa.



Choque frontal de una ranchera ($M = 3023 \text{ kg}$) y un turismo ($m = 1184 \text{ kg}$). Cada uno tenía una velocidad inicial de $22,35 \text{ m/s}$, se mueven en direcciones opuestas y se produce el choque de vehículos entre sí quedando trabados $\rightarrow$ colisión totalmente inelástica. ¿Cuál ha sido el cambio en las velocidades después de la colisión?

$\mathbf{v_f} = (-3023 + 1184)22.35\mathbf{i} / (3023 + 1184) = -9.770\mathbf{i} \text{ m/s}$ es la velocidad final

Cambio en la ranchera: $\Delta\mathbf{v_R} = -9.770\mathbf{i} - (-22.35\mathbf{i}) = 12.58 \mathbf{i} \text{ m/s}$

Cambio en el turismo: $\Delta\mathbf{v_T} = -9.770\mathbf{i} - 22.35\mathbf{i} = -32.12 \mathbf{i} \text{ m/s}$

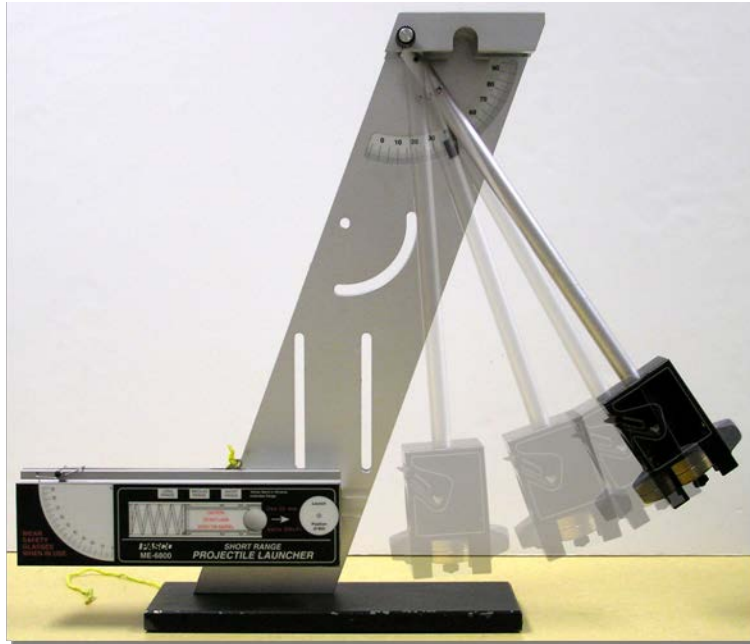
La relación entre los cambios de velocidad:

$$\Delta\mathbf{v_T} / \Delta\mathbf{v_R} = -32.12 / 12.58 = -2.553$$

$= -m_R / m_T$ (la inversa del cociente de las masas)

Ambos coches cambian sus velocidades durante el intervalo de tiempo idéntico que dura la colisión, de modo que la relación de aceleraciones (promedio) es también 2,553 $\Rightarrow$ las fuerzas experimentadas por el cuerpo del conductor del turismo son 2,553 veces mayores que las que experimenta el conductor de la ranchera. (Pero todavía: las fuerzas que ambos vehículos se ejercen entre sí son iguales ¡3ª Ley de Newton!) $\Delta K = K_i - K_f \approx 8.500 \times 10^5 \text{ J}$

Péndulo balístico



Question:

A bullet ($v=300$ m/s, $m=0.020$ kg) hits a block ($M=4.0$ kg) and sticks in it. What is the kinetic energy of block+bullet right after impact?

Answer:

This is obviously a completely inelastic collision

$$v_f = \frac{mv}{m+M} = \frac{0.02\text{kg}}{4.02\text{kg}}(300 \text{ m/s}) = 1.49 \text{ m/s}$$

$$\underline{K} = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m+M}$$

$$\underline{= 4.5 \text{ J}}$$

■ Compare:

$$K_{\text{bullet}} = \frac{1}{2}mv^2 = 900 \text{ J}$$

Example: Traffic Accident

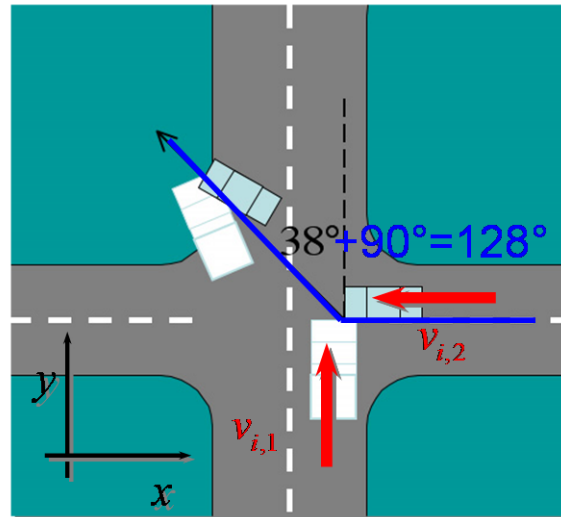
- Two car collision, totally inelastic, deflected by 38° as shown
- What is the ratio of the initial speeds of the two cars?
- Data: $m_1=2209$ kg (white pickup), $m_2= 1474$ kg (blue car)

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{i,1} + m_2 \vec{v}_{i,2}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{-m_2 v_{i,2}}{m_1 + m_2} \hat{x} + \frac{m_1 v_{i,1}}{m_1 + m_2} \hat{y}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \frac{\frac{m_1 v_{i,1}}{m_1 + m_2}}{\frac{-m_2 v_{i,2}}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 v_{i,1}}{-m_2 v_{i,2}}$$

$$v_{i,1} = - \frac{1474 \text{ kg} \cdot \tan 128^\circ}{2209 \text{ kg}} v_{i,2} = 0.85 v_{i,2}$$



Choque obluo

University Physics, Chapter 7

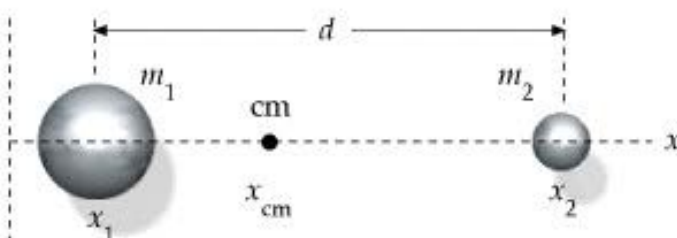
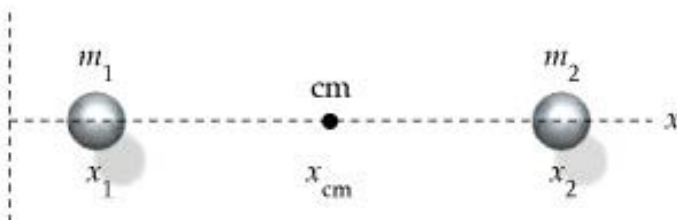
31

Centro de masas (masas puntuales)

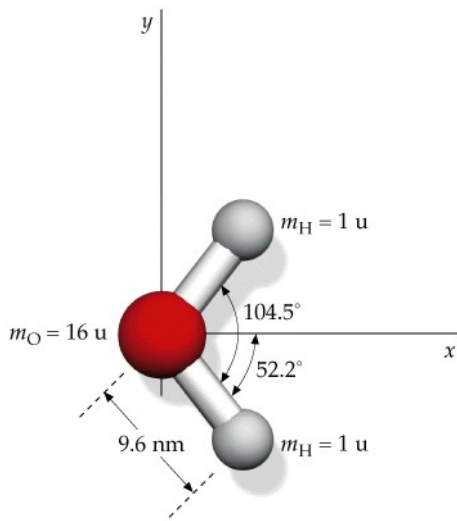
Es la suma ponderada (por la fracción de masa de cada partícula) de las posiciones de las partículas.

En una dimensión:

$$x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$$



En tres dimensiones



$$\mathbf{r}_{CM} = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$$

en donde, $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM} \mathbf{i} + y_{CM} \mathbf{j} + z_{CM} \mathbf{k}$$

EJEMPLO 3 ¿Dónde está el CM de la molécula de agua (3 partículas en dos dim.)?

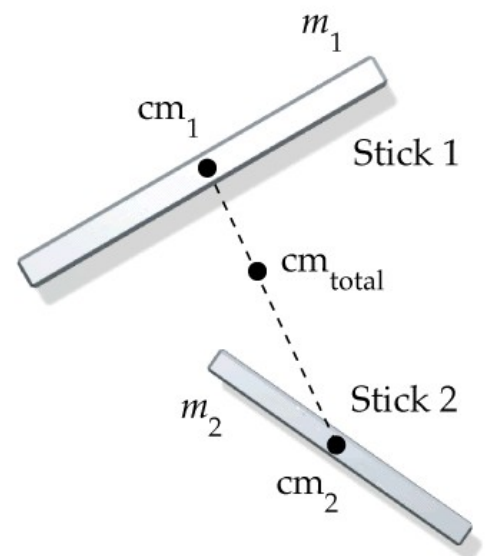
EJEMPLO 4 ¿Dónde está el CM de las dos varillas (no puntuales)?

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{(\text{dos varillas})} m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i =$$

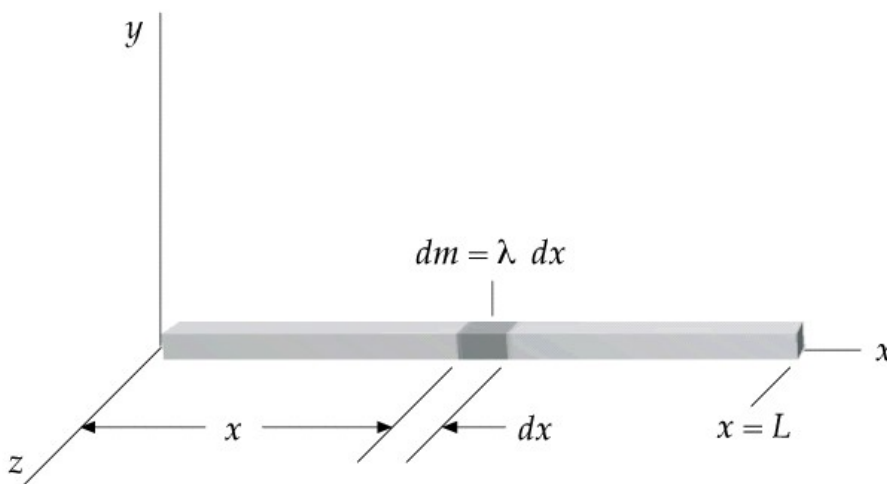
$$[\sum_{(\text{varilla 1})} m_j \mathbf{r}_j + \sum_{(\text{varilla 2})} m_k \mathbf{r}_k] \times$$

$$(1/\sum m_i) = [\mathbf{r}_{CM}(\text{varilla 1})m(\text{varilla 1}) + \mathbf{r}_{CM}(\text{varilla 2})m(\text{varilla 2})] / \sum_{(\text{dos varillas})} m_i$$

siendo $m_1 = \sum m_j$, $m_2 = \sum m_k$, $\sum m_i = m_1 + m_2$



EJEMPLO 5 Objeto continuo : ¿Dónde está el CM de la varilla?



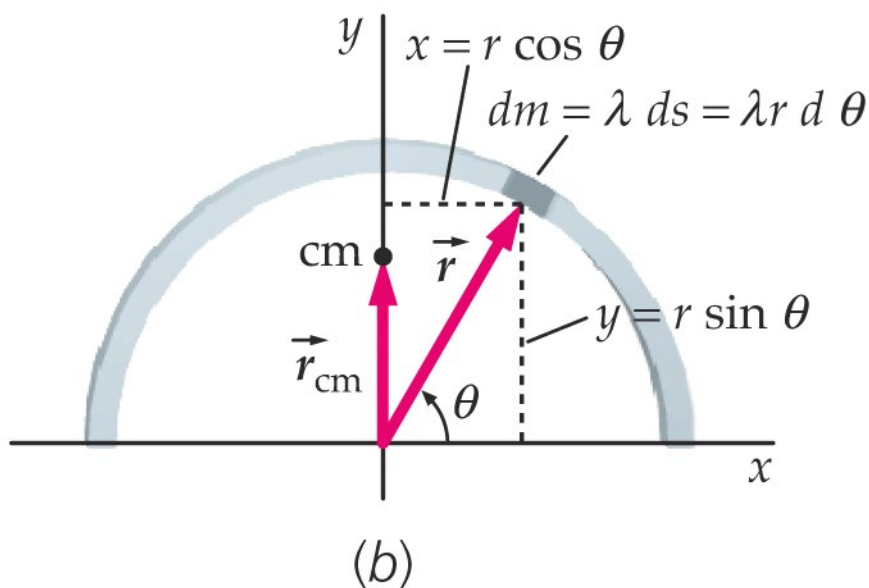
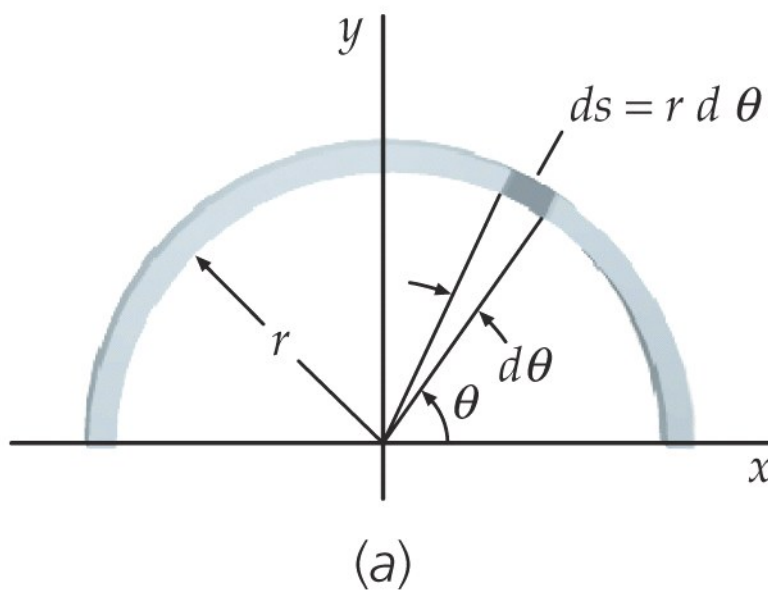
$$\mathbf{r}_{CM} = \int_{\text{varilla}} \mathbf{r} dm / M$$

 EJEMPLO 6: Obtención del CM de un aro semicircular

Por simetría, $x_{CM}=0$

$$my_{CM} = \int y dm = \int r \sin \theta \lambda r d\theta = \lambda r^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \lambda r^2 [-\cos \pi - (-\cos 0)] = 2\lambda r^2 = 2mr/\pi \quad (\text{pues } m = \lambda \pi r) \Rightarrow \mathbf{y_{CM}=2r/\pi}$$

$$\mathbf{r_{CM} = (0, 2r/\pi)}$$



👉 Movimiento del centro de masas (CM)

(de un sistema de partículas)

Velocidad CM:

$$\mathbf{v}_{CM} = d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum m_i (d\mathbf{r}_i /dt) / \sum m_i = \sum m_i \mathbf{v}_i / \sum m_i = \mathbf{p}_{total}/M$$

Aceleración CM:

$$\mathbf{a}_{CM} = d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum m_i (d\mathbf{v}_i /dt) / \sum m_i = \sum m_i \mathbf{a}_i /M \text{ (siendo } M = \sum m_i \text{)}$$

$$M \mathbf{a}_{CM} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{F}_i$ es la fuerza total sobre la partícula i

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum (\mathbf{F}_{i, \text{int}} + \mathbf{F}_{i, \text{ext}}) = \sum \mathbf{F}_{i, \text{int}} + \sum \mathbf{F}_{i, \text{ext}} = 0 + \sum \mathbf{F}_{i, \text{ext}}$$

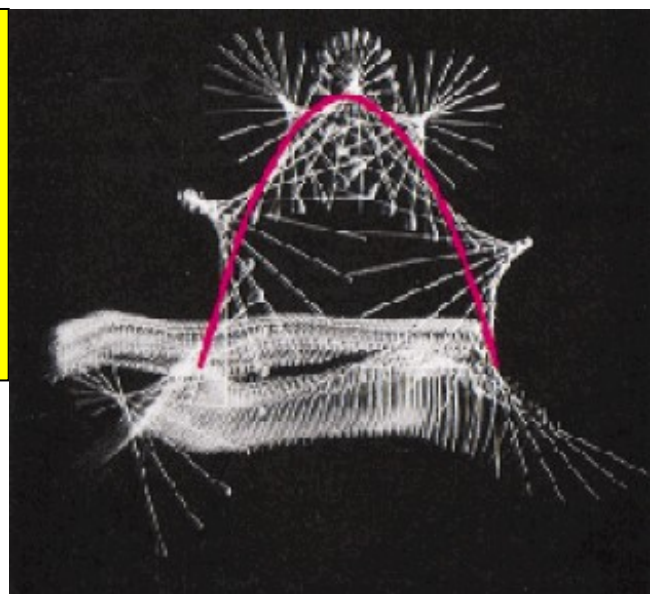
$$\sum \mathbf{F}_{i, \text{int}} = 0 \text{ (acción-reacción entre las partículas del sistema)}$$

2ª ley de Newton para el CM de un sistema de partículas

$$M \mathbf{a}_{CM} = \sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_{i, \text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{neta, ext}} = d\mathbf{p}_{total}/dt$$

que nos permite tratar los objetos extensos como partículas

El CM se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ sometida a la fuerza externa neta $\mathbf{F}_{\text{neta, ext}}$ que actúa sobre todo el sistema.



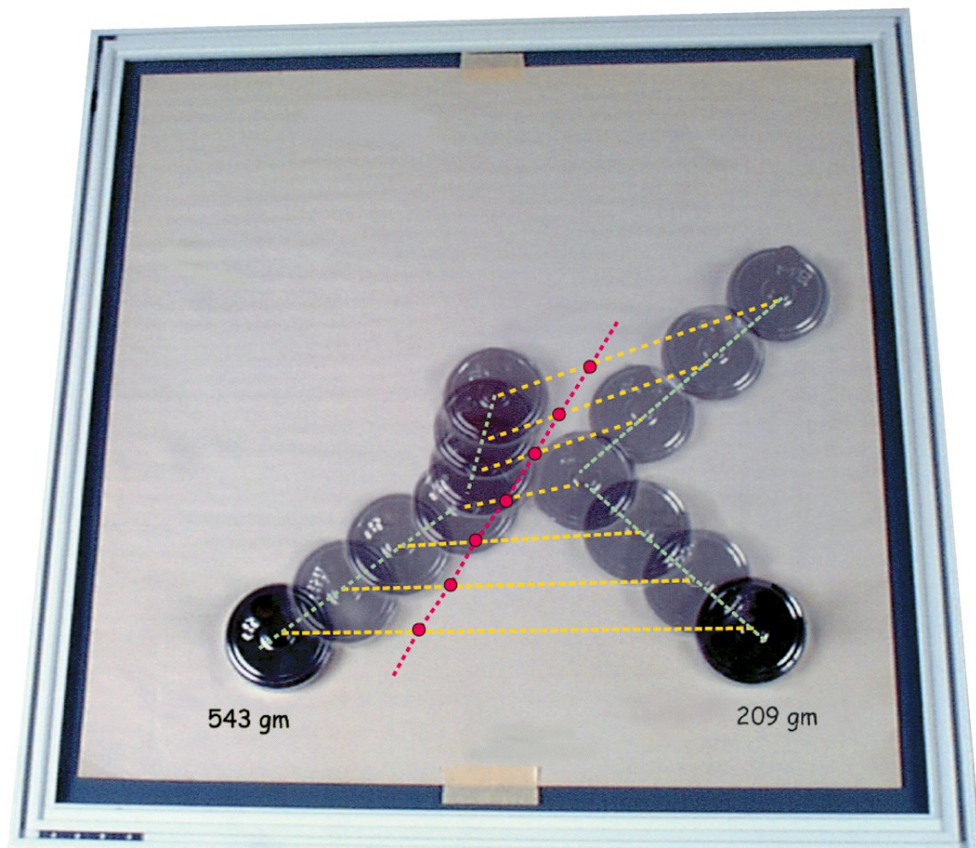
👉 Conservación del momento lineal: sistema CM

Si $\mathbf{F}_{\text{neta, ext}} = 0$,

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = M \mathbf{a}_{\text{CM}} = d\mathbf{p}_{\text{total}} / dt = 0 \Rightarrow$$

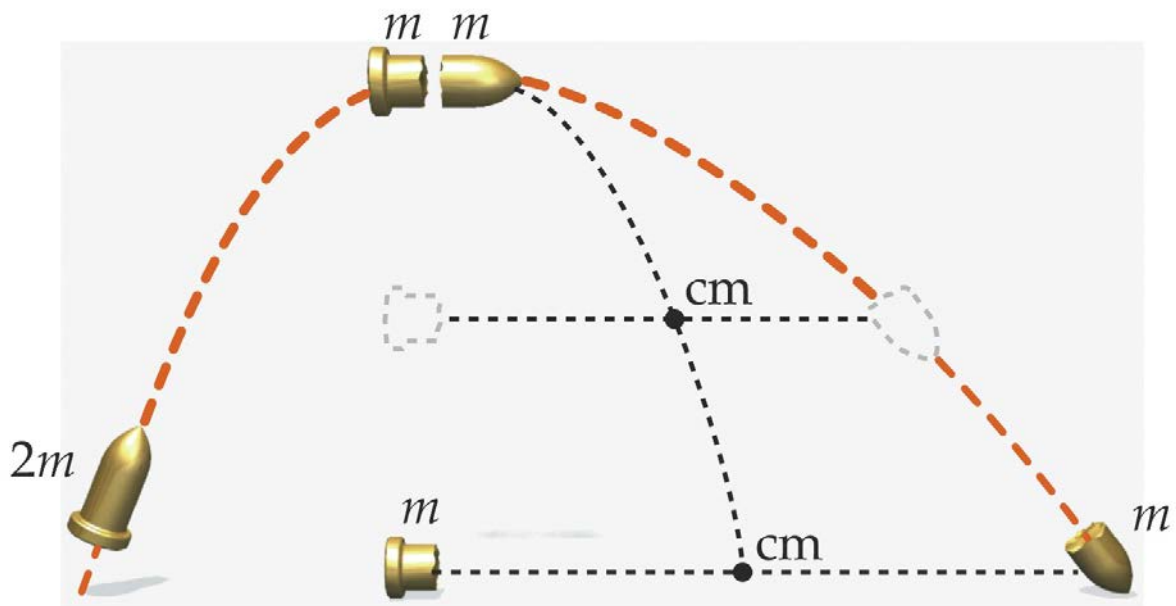
$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\text{CM}} = \text{constante}$$

(el marco de referencia CM es inercial
para un sistema aislado)



Colisión en una mesa sin rozamiento; la posición del CM de los dos discos (en rojo) describe un movimiento uniforme: $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \text{cte}$

👉 **Ejemplo:** Una explosión en el punto más alto de la parábola



$$[P_x \text{ antes} = (2m) v_x] = [P_x \text{ después} = 0 + m (2 v_x)]$$

Cuando la bala explota no está aislada, sobre ella actúa su peso. El peso es vertical, no hay fuerza externa horizontal (eje x), por tanto, la componente x del momento se conserva. No obstante, el peso en comparación con las fuerzas internas que generan la explosión es despreciable y puede considerarse a la bala aproximadamente aislada durante la explosión..

velocidad inicial: $v=24.5 \text{ m/s}$, ángulo $\theta= 36.9^\circ$, desde el suelo un fragmento cae directamente al suelo, ¿dónde cae el otro?

El CM cae donde caería el proyectil si no explota.

La explosión se ha producido por fuerzas internas.

La fuerza externa antes y después es el peso.

$$2mx_{CM} = mx_1 + mx_2 ;$$

$$x_{CM} = \text{alcance} ; x_1 = \text{alcance}/2;$$

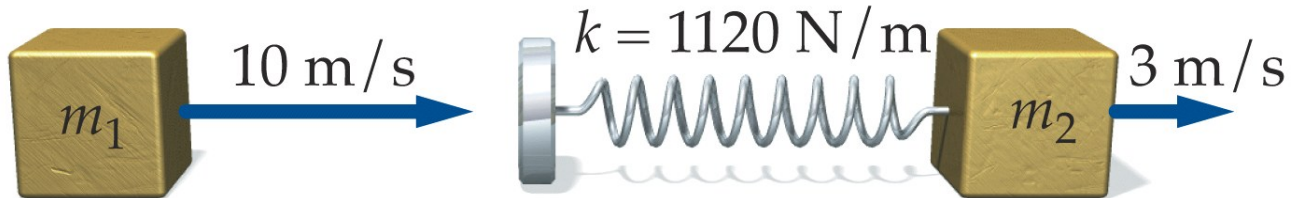
$$\text{alcance} = v^2 \sin 2\theta / g = 24.5^2 \sin 73.8^\circ / 9.8 = 58.8 \text{ m}$$

$$x_2 = \text{alcance} \cdot 3/2 = 88.2 \text{ m}$$

$$\text{¿energía cinética liberada? } E_c = mv_x^2$$

👉 Colisión elástica en el sistema laboratorio

En la figura, $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ y $m_2 = 5.0 \text{ kg}$. $v_{1i} = 10 \text{ m/s}$ y $v_{2i} = 3.0 \text{ m/s}$. A) ¿Velocidades finales? B) ¿Cuál es la compresión máxima del muelle?



A) Colisión elástica (ignoramos el muelle):

Conservación de $\mathbf{p}$: $m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$

Conservación de K y $\mathbf{p}$: $(\mathbf{v}_{1i} + \mathbf{v}_{1f}) = (\mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{2f})$
 $\rightarrow \mathbf{v}_{1f} = 0$; $\mathbf{v}_{2f} = 7.0 \text{ m/s}$

B) En el instante de máxima compresión, m_1 está en reposo respecto de m_2

No significa que toda la energía cinética inicial del sistema se invierta en comprimir el muelle porque eso significaría que el CM se para.

Conservación de la energía:

$$K_i = K_f + U_e \rightarrow m_1 \mathbf{v}_{1i}^2 + m_2 \mathbf{v}_{2i}^2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + k x^2$$

En el sistema (1+2+muelle), el muelle genera fuerzas interiores y el CM conserva su velocidad: $(m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}) / (m_1 + m_2) = \mathbf{v}_{\text{CM}} = 5.0 \text{ m/s} \rightarrow 2.0 \times 10.0^2 + 5.0 \times 3.0^2 = (2.0 + 5.0) 5.0^2 + 1120 x^2 \rightarrow x = 0.25 \text{ m}$ de compresión

👉 Sistema CM (velocidad $\mathbf{u}$)

Dos cuerpos colisionan en el sistema CM en el cual siempre $\mathbf{u}_{\text{CM}} = 0$:

$$\mathbf{u}_{\text{CM}} = 0 \Rightarrow (m_1 \mathbf{u}_{1i} + m_2 \mathbf{u}_{2i}) = 0 = (m_1 \mathbf{u}_{1f} + m_2 \mathbf{u}_{2f}) \Rightarrow$$

$$m_1 \mathbf{u}_{1i} = -m_2 \mathbf{u}_{2i} \quad \text{y} \quad m_1 \mathbf{u}_{1f} = -m_2 \mathbf{u}_{2f}$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}_{1i} = -\mathbf{p}_{2i} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_{1f} = -\mathbf{p}_{2f} \quad (\text{conservación de } \mathbf{p} \text{ en CM})$$

Las 2 partículas que colisionan se acercan mutuamente con momentos iguales en magnitud y con sentidos opuestos.

Si, además, la colisión es elástica, la velocidad relativa cambia de signo:

$$\mathbf{u}_{1i} - \mathbf{u}_{2i} = -(\mathbf{u}_{1f} - \mathbf{u}_{2f}) \Rightarrow \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{1f} = \mathbf{u}_{2i} + \mathbf{u}_{2f}$$

y la conservación de $\mathbf{p}$ en CM: $m_1 (\mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{1f}) = -m_2 (\mathbf{u}_{2f} + \mathbf{u}_{2i})$

como $m_1 \neq m_2 \Rightarrow (\mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{1f}) = 0 = (\mathbf{u}_{2f} + \mathbf{u}_{2i})$

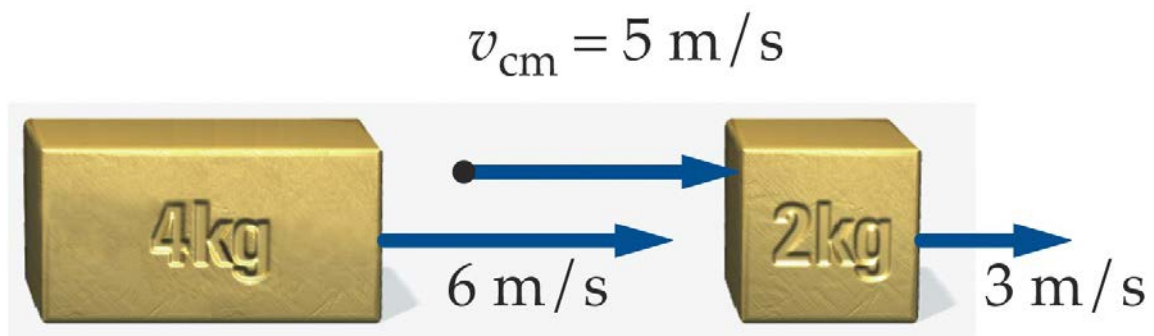
Las dos partículas que colisionan en CM,

Invierten su velocidad: $\mathbf{u}_{1i} = -\mathbf{u}_{1f}$ $\mathbf{u}_{2i} = -\mathbf{u}_{2f}$

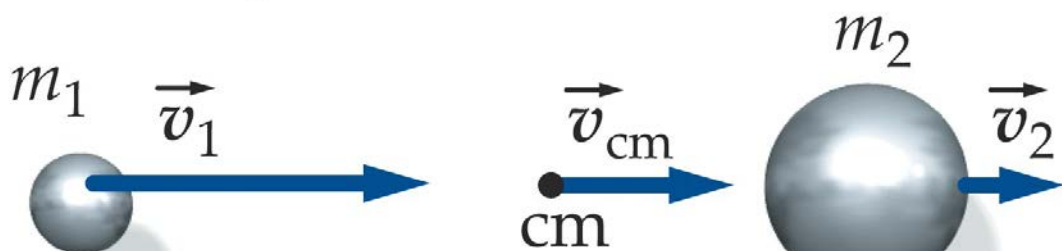
Intercambian su momento: $\mathbf{p}_{1i} = \mathbf{p}_{2f}$ $\mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f}$

(colisión elástica en CM)

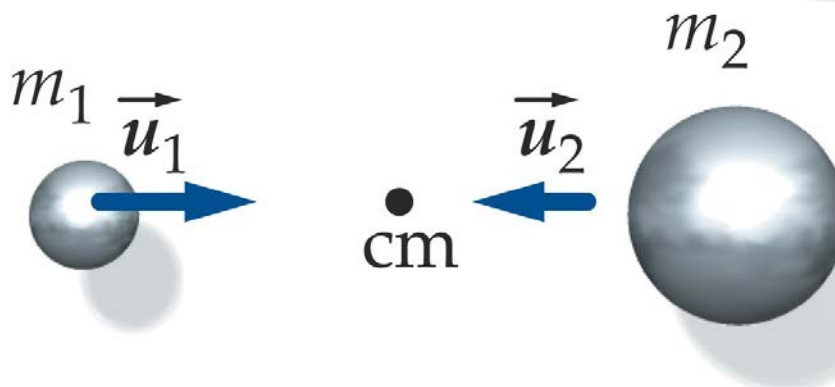
🔗 Colisión elástica en el sistema labo y en el sistema CM



LABORATORIO



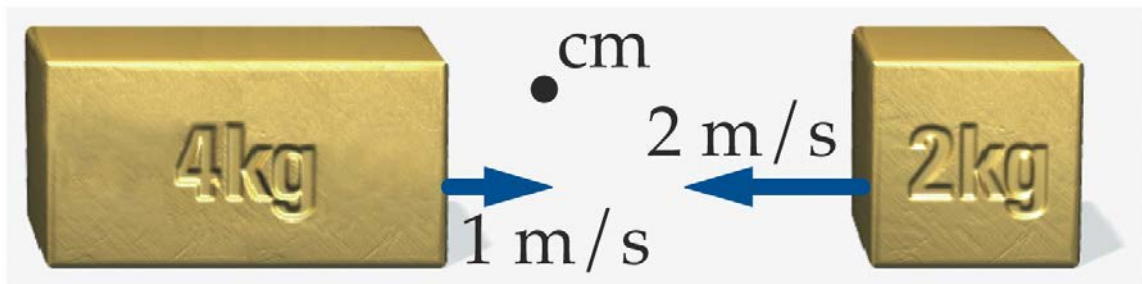
CENTRO DE MASAS



Obtener las velocidades en CM

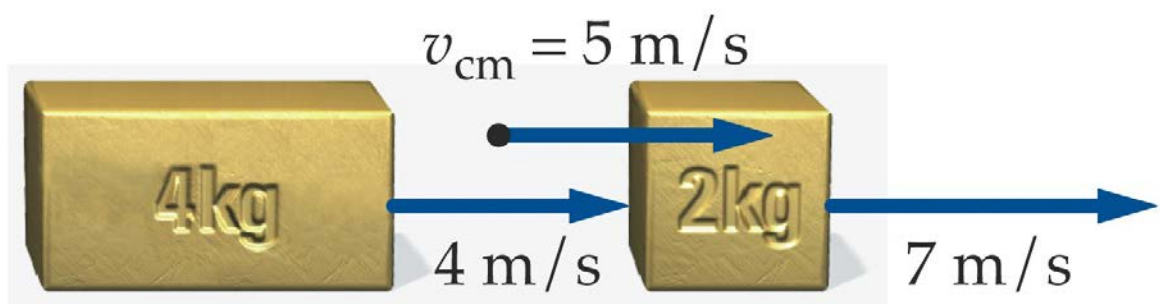
$$u_1 = v_1 - v_{cm} \quad u_2 = v_2 - v_{cm}$$

Invierten sus velocidades
Intercambian momento



Recuperar las velocidades en el sistema laboratorio

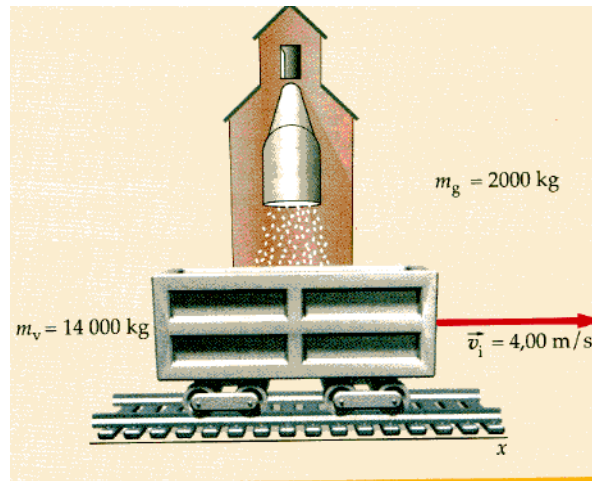
$$v_1 = u_1 + v_{cm} \quad v_2 = u_2 + v_{cm}$$



Ejemplo 8.2

El vagón incontrolado

Un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14 000 kg se desplaza horizontalmente a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Suponer que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.



$$mv = (m + m') v'$$

$$t = \text{distancia} / v'$$

la velocidad del grano antes de la “colisión” no es cero, pero no aporta momento en la dirección del movimiento del vagón

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display

Table 7.1 Momenta of Various Objects

Object	Momentum (kg m/s)
Alpha (α) particle from ^{238}U decay	$9.53 \cdot 10^{-20}$
90-mph fastball	5.75
Charging rhinoceros	$3 \cdot 10^4$
Car moving on freeway	$5 \cdot 10^4$
Supertanker at cruising speed	$4 \cdot 10^9$
Moon orbiting Earth	$7.58 \cdot 10^{25}$
Earth orbiting Sun	$1.78 \cdot 10^{29}$

👉 **Ejemplo:** Dos personas intercambian su posición en un bote en reposo de masa m_b , en aguas tranquilas. No hay rozamiento. ¿Qué distancia se ha movido el bote?

Al moverse (en el eje x), las personas crean solamente fuerzas interiores. El sistema {bote + dos personas} está “aislado en el plano horizontal” y en reposo

$\Rightarrow \mathbf{p}_{x \text{ total}} = M \mathbf{v}_{\text{CM}} = 0$ y se conserva $\Rightarrow V_{\text{CM}} = 0$

$\Rightarrow$ El CM del sistema no se mueve (respecto del agua).

$\Delta x_{\text{CM}}(\text{sistema})$ respecto del bote $= -\Delta x_{\text{bote}}$ respecto del CM = $= -\Delta x_{\text{bote}}$ respecto del agua

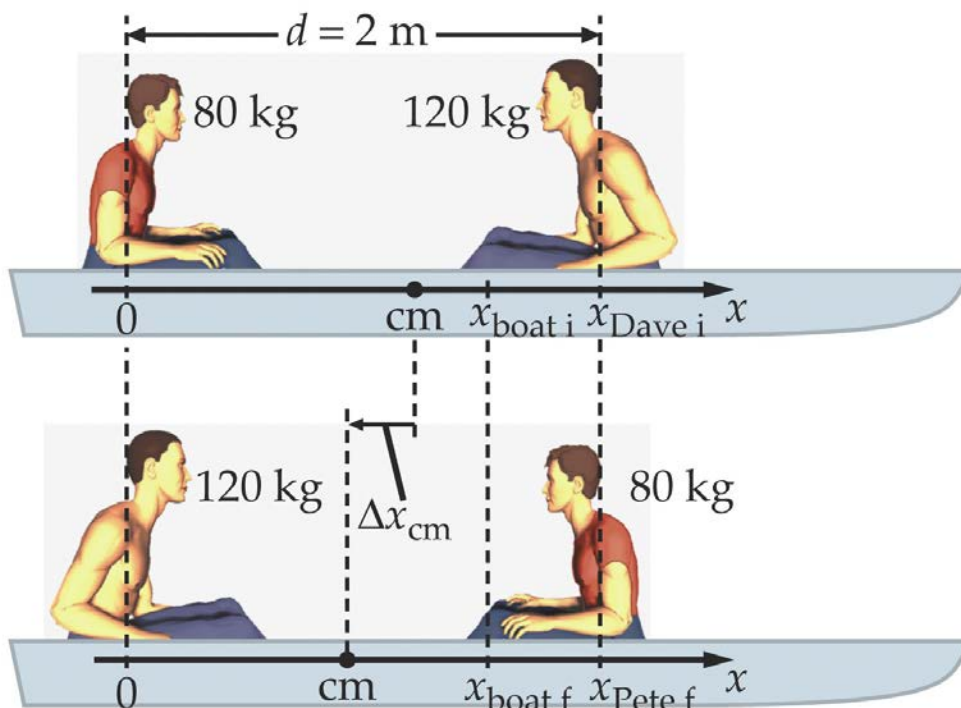
Origen en el extremo izquierdo del bote

$m = 120 + 80 + m_b$

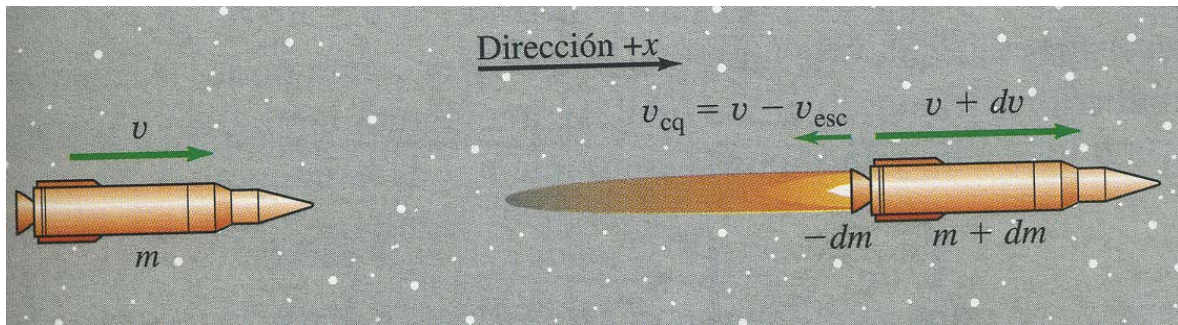
$m x_{\text{CM}}(\text{inicial}) = 80 \times 0 + 120 \times 2 + m_b x_b$

$m x_{\text{CM}}(\text{final}) = 120 \times 0 + 80 \times 2 + m_b x_b$

$\Delta x_{\text{CM}}(\text{sistema}) = (80 - 120) \times 2 / m = -0.308 \text{ m} \Rightarrow$ el CM se ha movido hacia el origen $\Rightarrow$ el bote se ha movido hacia la derecha en el agua



Propulsión a reacción (cohete en el espacio)



El cohete es impulsado hacia delante debido a la expulsión del combustible quemado hacia atrás.

La masa cambia durante el movimiento. La fuerza hacia delante la ejerce la **reacción** del material expulsado por el cohete hacia atrás.

Sea un cohete en el espacio, sin gravedad y sin rozamiento con el aire, que está aislado. Aplicaremos la conservación del momento lineal.

En t : $\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}$ respecto de un sist de ref. externo inercial

En $t+dt$: el cohete ha expulsado una masa $dm < 0$ (m disminuye)

Sea v_{esc} la veloc. de escape de la masa dm respecto del cohete.

La cantidad de movimiento de la masa expulsada es

$$-dm v_{cq} = -dm (-v_{esc} + v) \text{ respecto del sist de ref. externo}$$

La cantidad de movimiento del cohete es $(m+dm)(v+dv)$

$$\mathbf{p}_2 = (m+dm)(v+dv) - dm (-v_{esc} + v)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \Rightarrow mv = (m+dm)(v+dv) - dm (-v_{esc} + v)$$

$$m dv = -dm v_{esc} - dm dv \approx -dm v_{esc}$$

$$F_{ext} \text{ sobre el cohete} = m a = m dv/dt \approx -v_{esc} dm/dt$$

$$m dv \approx -dm v_{esc} \rightarrow v(m) - v(m_0) \approx -v_{esc} \int dm/m = v_{esc} \ln(m_0/m)$$

👉 **Ejemplo** En el primer segundo de encendido, un cohete expulsa $1/120$ de su masa inicial m_0 con velocidad relativa de 2400 m/s , ¿qué aceleración inicial tiene?

$$-v_{esc} \Delta m / \Delta t = -2400(-m_0/120)/1 = m_0 a \rightarrow a = 20 \text{ m/s}^2$$

Un trineo cisterna cargado con agua tiene una masa m_0 , siendo la masa del vehículo vacío m_T . El trineo viaja sobre hielo con una velocidad v_0 en línea recta cuando empieza a lanzar agua por la boca de una manguera hacia atrás a un caudal constante k y con una velocidad v_{esc} relativa al trineo. ¿Qué distancia viaja el trineo hasta que pierde toda su carga?

Tiempo que viaja hasta perder toda la carga:

Distancia viajada por el trineo $\Delta x = \int_0^{t_{max}} v(t) dt$

$$m(t) = m_0 - kt; t_{max} = \frac{m_0 - m_T}{k}; m(t = t_{max}) = m_T$$

$$m dv = -v_{esc} dm \quad m \text{ y } v \text{ cambian con } t$$

$$v(m) - v(m_0) = -v_{esc} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) > 0; v(m_0) = v_0$$

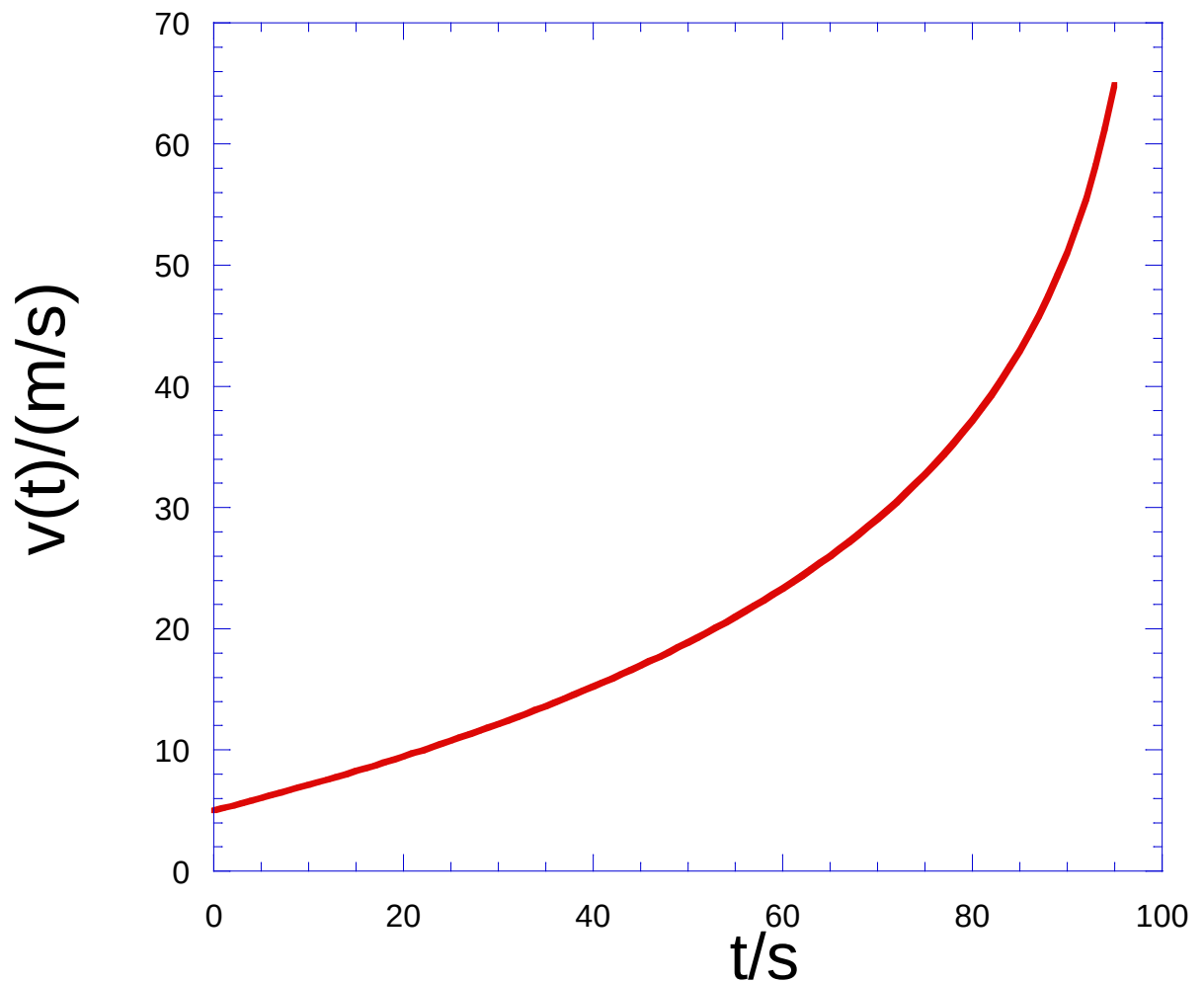
$$v(t) = v_0 - v_{esc} \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right) = v_0 - v_{esc} \ln\left(1 - kt/m_0\right)$$

$$\Delta x = \int_0^{t_{max}} [v_0 - v_{esc} \ln(1 - kt/m_0)] dt = v_0 t_{max} - v_{esc} \left(\frac{(kt_{max}/m_0)^{-1}}{k/m_0} \right) \ln(-kt_{max}/m_0) - t_{max}$$

$$\int \ln(1 - ax) dx = \frac{ax - 1}{a} \ln(1 - ax) - x$$

Ej. $v_0 = 5.0 \text{ m/s}$; $v_{esc} = 20 \text{ m/s}$; $k = 10 \text{ kg/s}$; $m_0 = 1000 \text{ kg}$;

$m_T = 50 \text{ kg}$.



Durante la reparación del telescopio espacial *Hubble*, una astronauta reemplaza dos paneles solares cuyos marcos se han curvado. Al empujar los paneles deteriorados hacia atrás en el espacio exterior, ella experimenta un impulso en sentido opuesto. La masa de la astronauta es 60 kg y la del panel 80 kg. La astronauta y el panel están inicialmente en reposo respecto al telescopio. La astronauta empuja el panel y éste se mueve a 0,3 m/s respecto del telescopio. ¿Cuál es su velocidad posterior respecto al telescopio? (Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, suponer que la cuerda permanece floja.)

